

Correction du concours blanc

Option informatique, première année

Julien REICHERT

Exercice 1

Une structure finie non vide possède un minimum global, qui est a fortiori local.

Soit une structure de données infinie dont les éléments sont pris dans un ensemble bien fondé. On considère un élément arbitraire x_0 de cette structure. Alors de deux choses l'une : soit l'élément est un minimum local, soit il a un voisin strictement inférieur. On crée alors une suite (x_n) telle que x_{n+1} soit le plus petit nombre entre x_n et ses voisins, en faisant abstraction des positions permettant de trouver ces éléments. La suite (x_n) ne peut pas à la fois être infinie et strictement décroissante, or elle est clairement décroissante et dès que deux éléments consécutifs x_n et x_{n+1} sont identiques, c'est que x_n n'avait aucun voisin strictement inférieur, ce qui veut dire qu'on était en présence d'un minimum local (peu importe si la position de x_{n+1} ait été différente, à ce propos). Ce principe est exactement celui qu'on utilise dans la dernière question.

Exercice 2

```
let indice_min_local tab =
  let n = vect_length tab in
  if n = 0 then failwith "Tableau vide"
  else if n = 1 || tab.(0) <= tab.(1) then 0 (* évaluation paresseuse *)
  else
    begin (* pas nécessaire mais bon pour la lisibilité *)
      let i = ref 1 in
      while !i < n-1 && tab.(!i) > tab.(!i+1) do
        incr i
      done; !i
    end;;
```

La complexité au pire des cas est linéaire en la taille du tableau.

Exercice 3

On fait une dichotomie : soit l'élément du milieu est un minimum local, soit il a un voisin strictement inférieur, et on part dans le demi-tableau contenant ce voisin, car il y a au moins un minimum local dans ce demi-tableau, que les éléments soient strictement décroissants du milieu au bord (qui est un minimum local) ou que cette décroissance s'arrête, donc sur un minimum local.

Pour faire bonne mesure, tester les éléments du bord au début procure une probabilité assez forte de tomber tout de suite sur un minimum local, puisque ces éléments n'ont qu'un voisin. Mieux encore, cela garantit qu'on ne débordera pas lors de la dichotomie (même si la condition d'arrêt suffit, on n'a vraiment pas besoin de se poser de question).

```

let indice_min_local_dicho tab =
  let n = vect_length tab in
  if n = 0 then failwith "Tableau vide"
  else if n = 1 || tab.(0) <= tab.(1) then 0 (* évaluation paresseuse *)
  else if tab.(n-1) <= tab.(n-2) then n-1
  else
    begin
      let ind_min = ref 0 and ind_max = ref (n-1) in
      while !ind_min < !ind_max do
        let ind_mil = (!ind_min + !ind_max)/2 in
        if tab.(ind_mil) <= tab.(ind_mil-1) && tab.(ind_mil) <= tab.(ind_mil+1)
          then begin ind_min := ind_mil; ind_max := ind_mil end (* sortie de boucle manuelle *)
        else if tab.(ind_mil) > tab.(ind_mil-1)
          then ind_max := ind_mil
        else
          ind_min := ind_mil
        done; !ind_min
      end;;

```

Exercice 4

La complexité ne peut pas être logarithmique dans la mesure où l'accès au dernier élément nécessite de parcourir la liste en entier, et si la liste est décroissante le dernier élément est le seul minimum local. En particulier, si on avait converti la liste en tableau pour faire une dichotomie, le coût de recopiage linéaire aurait été plus important que la recherche proprement dite.

```

let min_local_liste l =
  if l = [] then failwith "Liste vide";
  let rec aux pos elt_prec = fonction
  | [] -> elt_prec
  | elt::q when elt_prec <= elt -> elt_prec (* Finit plus vite qu'avec < *)
  | elt::q -> aux (pos+1) elt q
  in aux 0 (hd l) (tl l);;

```

Exercice 5

Il est bien entendu possible de procéder par pas de taille la précision souhaitée, mais la dichotomie est évidemment mieux adaptée. La fonction peut être itérative (auquel cas on peut se référer à la recherche de zéro par dichotomie en Python, une transcription adaptée à notre problème s'écrit aisément) ou récursive, comme ci-dessous.

Attention, ce qui compte ici est d'étudier les variations sur une petite partie de l'intervalle pour détecter la présence d'une zone où la fonction décroît puis d'une zone où elle croît, puis de restreindre la taille de l'intervalle englobant ces deux zones.

```

let rec minlocalfonction f a b eps =
  let mil = (a +. b) /. 2 in
  if b -. a < 2. *. eps then mil
  else if f(a) <= f(a +. eps) then a (* il y a un minimum global dans la zone *)
  else if f(b) <= f(b -. eps) then b (* parce qu'à un moment ça descend entre près du bord et le bord *)
  else if f(mil) <= f(mil +. eps) && f(mil) <= f(mil -. eps) then mil
  else if f(mil) > f(mil +. eps) then minlocalfonction f mil b eps
  else minlocalfonction f a mil eps;;

```

Exercice 6

On peut simplement adapter la fonction sur les tableaux, en notant que rien n'impose que les lignes soient de même taille. Ici, on va faire un parcours avec rattrapage d'exceptions pour la flexibilité.

Vu qu'on va modulariser ultérieurement, autant écrire tout de suite une fonction annexe utile déterminant si une position correspond à un minimum local.

```
let est_min_local tab i j =
let n = vect_length tab in
  (i = 0 || j >= vect_length tab.(i-1) || tab.(i).(j) <= tab.(i-1).(j))
  && (i = n-1 || j >= vect_length tab.(i+1) || tab.(i).(j) <= tab.(i+1).(j))
  && (j = 0 || tab.(i).(j) <= tab.(i).(j-1))
  && (j = vect_length tab.(i)-1 || tab.(i).(j) <= tab.(i).(j+1));;

exception Trouve of int * int;;

let indice_min_local_matrice tab =
  let n = vect_length tab in
  try
    for i = 0 to vect_length tab - 1 do
      for j = 0 to vect_length tab.(i) - 1 do
        if est_min_local tab i j then raise (Trouve (i,j))
      done
    done; failwith "Ce cas n'arrive jamais sauf si la matrice est vide"
  with Trouve (i,j) -> (i,j);;
```

La complexité est linéaire en la taille de la matrice, donc en la somme des tailles de ses lignes.

Exercice 7

La complexité est la même si on crée la matrice correspondant à la liste (temps linéaire en la taille totale) puis on appelle la fonction précédente (idem). C'est la notion de réduction en théorie de la complexité.

Cependant, en imposant de conserver la structure de liste, un calque de la fonction précédente nécessiterait d'écrire une fonction d'accès au i -ième élément de la j -ième liste, et un tel accès demande $i + j$ opérations pour remonter cet élément en tête, d'où une complexité pour une liste de n listes de taille m en $\mathcal{O}((m+n)mn)$.

Bien entendu, il existe une autre solution : rechercher le minimum global de la liste de listes, ce qui prend un temps linéaire en la taille totale. Quoi qu'il en soit, la meilleure réponse à « Envie de l'écrire ? » est « Non ! ».

Cependant, puisque tout le monde est là pour souffrir...

```
let min_global_listes l =
  let rec min_global ligne colonne l c valeur = fonction
  | [] -> (ligne, colonne)
  | []::q -> min_global ligne colonne (l+1) 0 valeur q
  | (elt::reste)::q when elt < valeur -> min_global l c l (c+1) elt (reste::q)
  | (_::reste)::q -> min_global ligne colonne l (c+1) valeur (reste::q)
  in min_global 0 0 0 0 (hd (hd l)) l;;
```

Exercice 8

Cet exercice est sans nul doute le plus long et le plus difficile, et l'indication n'est pas de trop. Par conséquent, la programmation modulaire est la bienvenue.

À ce titre, on réutilise la fonction `est_min_local`.

```
exception Min of int * int;;

let min_fenetre mat debl finl debc finc =
  let milieul = (debl+finl)/2 and milieuc = (debc+finc)/2 in
  let l = ref debl and c = ref debc in
  for j = debc to finc do
    if est_min_local mat debl j then raise (Min (debl, j));
    if est_min_local mat milieul j then raise (Min (milieul, j));
    if est_min_local mat finl j then raise (Min (finl, j));
    if mat.(debl).(j) < mat.(!l).(c) then begin l := debl; c := j end;
    if mat.(milieul).(j) < mat.(!l).(c) then begin l := milieul; c := j end;
    if mat.(finl).(j) < mat.(!l).(c) then begin l := finl; c := j end
  done;
  for i = debl+1 to finl-1 do
    if est_min_local mat i debc then raise (Min (i, debc));
    if est_min_local mat i milieuc then raise (Min (i, milieuc));
    if est_min_local mat i finc then raise (Min (i, finc));
    if mat.(i).(debc) < mat.(!l).(c) then begin l := i; c := debc end;
    if mat.(i).(milieuc) < mat.(!l).(c) then begin l := i; c := milieuc end;
    if mat.(i).(finc) < mat.(!l).(c) then begin l := i; c := finc end
  done;
  (!l, !c);;

let min_local_dicho mat =
  let n = vect_length mat in (* On suppose qu'on dispose d'une vraie matrice carrée. *)
  let rec aux debl finl debc finc =
    let milieul = (debl+finl)/2 and milieuc = (debc+finc)/2 in
    try
      let (ligne, colonne) = min_fenetre mat debl finl debc finc in
      if ligne = debl || (ligne = milieul && mat.(ligne).(colonne) > mat.(ligne-1).(colonne))
        then if colonne <= milieuc then aux debl milieul debc milieuc
             else aux debl milieul milieuc finc
      else if ligne = finl || ligne = milieul
        then if colonne <= milieuc then aux milieul finl debc milieuc
             else aux milieul finl milieuc finc
      else if colonne = debc (colonne = milieuc && mat.(ligne).(colonne) > mat.(ligne).(colonne-1))
        then if ligne <= milieul then aux debl milieul debc milieuc
             else aux milieul finl debc milieuc
      else
        if ligne <= milieul then aux debl milieul milieuc finc
        else aux milieul finl milieuc finc
    with Min (l, c) -> (l, c)
  in aux 0 (n-1) 0 (n-1);;
```

Ce code présente une particularité intéressante : la signature de la fonction auxiliaire n'est pas donnée par des cas de base vu qu'il n'y en a pas, c'est seulement le rattrapage d'exceptions qui permet de l'obtenir.

Il est nécessaire d'étudier toute la fenêtre et pas seulement la croix de séparation avec cet algorithme, car le minimum de cette croix peut être plus grand que le minimum de la fenêtre, et dans la zone qu'on étudierait alors, il est possible d'avoir une sorte de gradient dirigeant hors de la zone sans y trouver de minimum.

Exercice 9

Puisqu'on n'étudie qu'un des carrés et qu'on cherche aussi un minimum global sur une fenêtre avec $6n - 9$ éléments, on a la formule $c_n = c_{\frac{n}{2}} + \mathcal{O}(n)$, donc d'après le master theorem le terme de droite est prépondérant et $c_n = \mathcal{O}(n)$.

Exercice 10

L'idée de couper en deux reste pertinente, et il est certes pratique pour le programmeur de découper toujours dans le même sens, jusqu'à ne plus avoir par exemple qu'une ligne, mais dans ce cas la complexité sera plus élevée. La formule devient $c_m = c_{\frac{m}{2}} + \mathcal{O}(\sqrt{m})$ en alternant les séparations en deux horizontalement et verticalement afin que la taille de la fenêtre soit effectivement en $\mathcal{O}(\sqrt{m})$, soit $c_m = \mathcal{O}(\sqrt{m})$ (comme dans le cas précédent, donc), ou alors $c_l = c_{\frac{l}{2}} + \mathcal{O}(\sqrt{m})$ (avec $c_1 = \mathcal{O}(\sqrt{m})$) car le nombre d'opérations à chaque étape est linéaire en le nombre de lignes (par exemple) de la matrice de départ, et ici le master theorem ne peut pas vraiment s'appliquer mais une analyse similaire à l'écriture de sa preuve donne $c_m = \mathcal{O}(\sqrt{m} \log(m))$.

Exercice 11

La solution est en temps constant : on prend un élément arbitraire, disons un coin. Soit c'est un **false**, donc un minimum local, soit c'est un **true** dont les seuls voisins sont des **true**, et c'est encore un minimum local, soit c'est un **true** dont un voisin est un **false**, qui est, lui, un minimum local.

```
let min_local_bool mat =
  if not mat.(0).(0) then (0, 0) (* si mat ou mat.(0) est vide, tant pis, il y aura une erreur)
  else if vect_length mat > 1 && not mat.(1).(0) then (1, 0)
  else if vect_length mat.(0) > 1 && not mat.(0).(1) then (0, 1)
  else (0, 0);;
```

Exercice 12

L'algorithme est simple : on part d'une position quelconque et on suit un chemin dans la matrice en prenant comme successeur le voisin le plus petit, en donnant priorité à la position actuelle. Ce chemin se stabilise sur un minimum local, et le nombre d'étapes est au plus la valeur du premier élément visité, donc au plus le maximum de la matrice, d'où la complexité. En effet, puisque la position actuelle est prioritaire, un déplacement garantit une décroissance stricte, et l'algorithme s'arrête dès que l'on reste sur place.

```
let plus_petit_voisin tab i j =
  let n = vect_length tab and l = ref i and c = ref j in
  if i > 0 && j < vect_length tab.(i-1) && tab.(i-1).(j) < tab.(!l).(c)
  then begin l := i-1; c := j end;
  if i < n-1 && j < vect_length tab.(i+1) && tab.(i+1).(j) < tab.(!l).(c)
  then begin l := i+1; c := j end;
  if j > 0 && tab.(i).(j-1) < tab.(!l).(c)
  then begin l := i; c := j-1 end;
  if j < vect_length tab.(i)-1 && tab.(i).(j+1) < tab.(!l).(c)
  then begin l := i; c := j+1 end; (!l, !c);;

let min_local_borne mat =
  let rec parcours l c = let (ll, cc) = plus_petit_voisin mat l c in
    if l = ll && c = cc then (l, c) else parcours ll cc
  in parcours 0 0;
```